ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

2ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τη συνήθη μετρική.
α) Να βρεθούν το εσωτερικό, η κλειστή θήκη και το παράγωγο σύνολο καθενός από τα παρακάτω σύνολα:
$A = (0,1] \cup \{2,3\}$, $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\Gamma = \mathbb{Q} \cap (0,1)$, $\Delta = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$.
β) Να βρεθεί $E \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $E' = \mathbb{N}$.
γ) Να γράψετε το σύνολο $\mathbb{Q}$ ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων και το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων.

2) Θεωρούμε το $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με τη συνήθη (ευκλείδεια) μετρική.
α) Να βρεθούν το εσωτερικό, η κλειστή θήκη και το παράγωγο σύνολο καθενός από τα παρακάτω σύνολα.
$A = (0,1) \times \{0\}$, $B = \{(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$,
$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.
β) Να δείξετε ότι το σύνολο $\{(x, \frac{1}{x}) : x \neq 0\}$ είναι κλειστό (μπορείτε να το αποδείξετε με χρήση ακολουθιών).

3) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και U ανοικτό υποσύνολο του X με $U \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Δείξτε ότι $U \cap A \neq \emptyset$.

4) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $G \subseteq X$. Να δείξετε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.
(i) Το G είναι ανοικτό.
(ii) Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$.
(iii) Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$.
(Υπόδειξη: Για τη συνεπαγωγή (iii) $\Longrightarrow$ (i), εφαρμόστε την (iii) για $A = X \setminus G$).

5) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο X με $x_n \to x$. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι κλειστό.

6) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $A, B \subseteq X$. Δείξτε ότι:
(i) $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.
(ii) Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A' \subseteq A$.
(iii) Αν $A \subseteq B$ τότε $A' \subseteq B'$.
(iv) Το A' είναι κλειστό υποσύνολο του X.
(v) Αν $\mathrm{int}(\{x\}) = \emptyset$ τότε το x είναι σημείο συσσώρευσης του X.
(vi) $A'' \subseteq A'$. Να δοθεί παράδειγμα (στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική) όπου ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.

7) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και A, B δυο μη κενά υποσύνολα του X. Δείξτε ότι $\rho(\overline{A}, \overline{B}) = \rho(A, B)$.

8) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και A, B δυο μη κενά, κλειστά και ξένα υποσύνολα του X. Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{\rho(x,A)}{\rho(x,A) + \rho(x,B)}$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι καλά ορισμένη, συνεχής με $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in X$ και ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in B$.
β) Να δείξετε ότι υπάρχουν U, V ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X, ώστε $A \subseteq U$ και $B \subseteq V$.

Παράδειγμα: Στον $\mathbb{R}$ έστω p η συνήθης μετρική και d η διακριτή μετρική

Η ταυτοτική συνάρτηση $I:(\mathbb{R},p)\to(\mathbb{R},d)$ δεν είναι συνεχής, αφού $\{0\}$ είναι ανοικτό στον $(\mathbb{R},d)$, αλλά $I^{-1}(\{0\})=\{0\}$ δεν είναι ανοικτό στον $(\mathbb{R},p)$.

Η ταυτοτική συνάρτηση $I:(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R},p)$ είναι συνεχής, αφού αν A ανοικτό στο $(\mathbb{R},p)$ τότε το $I^{-1}(A)=A$ είναι ανοικτό στο $(\mathbb{R},d)$.

Παρατήρηση: Αν η $f:(X,p)\to(Y,d)$ είναι συνεχής δεν είναι εν γένει σωστό ότι αν $A\subseteq X$ ανοικτό τότε $f(A)$ ανοικτό στο Y.

- Για παράδειγμα στο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τη συνήθη μετρική η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ είναι συνεχής. Το $A=(-1,1)$ είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$, όμως το $f(A)=[0,1)$ δεν είναι ανοικτό.

Άσκηση: Έστω (X,p) μ.χ. και $x_0\in X$, $r>0$

Να δειχθεί ότι $\text{diam}(B_p(x_0,r))\leq 2r$

$\text{diam}(\hat{B}_p(x_0,r))\leq 2r$

Απόδειξη: Εφόσον $B_p(x_0,r)\subseteq\hat{B}_p(x_0,2r)$ αρκεί να δειχθεί το δεύτερο

Για κάθε $x,y\leq\hat{B}_p(x_0,r)$ ισχύει $p(x,y)\leq p(x,x_0)+p(x_0,y)=p(x,x_0)+p(y,x_0)$ $\leq r+r=2r$.

Αν $\sup\{p(x,y),\ x,y\in\hat{B}_p(x_0,r)\}\leq 2r$

Άσκηση: Έστω (X,ρ) μ.χ. και $A \subseteq X$ μη κενό. Να δείξω ότι
$\text{διαμ}(A) < +\infty \Leftrightarrow \exists x_0 \in X \ \exists r > 0 \quad A \subseteq B_\rho(x_0, r)$

Απόδειξη: Αν $A \subseteq B_\rho(x_0,r)$ για $x_0 \in X,\ r>0$ τότε $\text{διαμ} A \leq \text{διαμ} B_\rho(x_0,r) \leq 2r$

άρα $\text{διαμ} A < +\infty$

($\Rightarrow$) Αν $\text{διαμ} A < +\infty$ επιλέγουμε $x_0 \in A$ τυχαίο και $r \in \mathbb{R}$ με $r > \text{διαμ} A$

Θ.δ.ο. $A \subseteq B_\rho(x_0,r)$. Πράγματι, αν $x \in A$ τότε $\rho(x,x_0) \leq \text{διαμ} A < r$
άρα $x \in B_\rho(x_0,r)$

Ορισμός: Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μετρικοί χώροι.
a) Μια συνάρτηση $f: X \to Y$ λέγεται ομοιομορφισμός αν η f είναι 1-1, επί, συνεχής και $f^{-1}: Y \to X$ είναι συνεχής.
b) Οι (X,ρ) λέγεται ομοιομορφικός αν υπάρχει $f: X \to Y$ ομοιομορφισμός.
Όταν αυτό συμβαίνει συμβολίζουμε $(X,\rho) \simeq (Y,d)$.

Παραδείγματα: (Στα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ παρακάτω θεωρούμε τη σχετική μετρική από τη συνήθη του $\mathbb{R}$)
1) Οι $[0,1]$, $[0,2]$ είναι ομοιομορφικοί. Εφόσον η $f: [0,1] \to [0,2]$
$f(x) = 2x$ είναι 1-1, επί, συνεχής και f^{-1} συνεχής

Γενικότερα αν $a, b, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $a<b, \gamma<\delta$ οι $[a,b]$ και $[\gamma,\delta]$ είναι ομοιομορφικοί
$[0,1] \simeq [a,b] \qquad f(x) = a + (b-a)x$
f 1-1, επί, συνεχής και η f^{-1} συνεχής.

Ομοίως $[0,1] \approx [\gamma,\delta]$ και $[a,b] \approx [0,1]$, $[0,1] \approx [\gamma,\delta]$, άρα $[a,b] \approx [\gamma,\delta]$

2) Οι $(0,1)$, $(0,2)$ είναι ομοιομορφικοί $(f(x) = 2x)$

Όπως και πριν αποδεικνύεται ότι αν $a,b,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ με $a<b$, $\gamma<\delta$

$(a,b) \approx (\gamma,\delta)$

3) Ο $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικός με τον $(-1,1)$

π.χ. η $f: \mathbb{R} \to (-1,1)$ με $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ είναι 1-1, επί, συνεχής και

η f^{-1} είναι συνεχής.

Συνεπώς αφού $(-1,1) \approx (a,b)$ για $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$

$\mathbb{R} \approx (a,b)$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$

<u>2ος τρόπος</u> $f: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \arctan(x)$

1-1, επί, συνεχής και η $f^{-1}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ $f^{-1}(x) = \tan x$ είναι συνεχής

4) Το $[0,1]$ δεν είναι ομοιομορφικό με το $(1,2) \cup [3,4)$ και γενικότερα δεν είναι ομοιομορφικό με κανένα $A \subseteq \mathbb{R}$ που δεν είναι διάστημα. Πράγματι, αν $A \subseteq \mathbb{R}$ δεν είναι διάστημα τότε υπάρχουν $a<b<\gamma$ με $a,\gamma \in A$, $b \notin A$

Αν $f: [0,1] \to A$ συνεχής και επί, τότε από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών το A θα ήταν διάστημα, <u>ΑΤΟΠΟ!</u>

5) Όπως πριν $[a,b) \approx [\gamma,\delta)$. Επίσης, $[a,b) \approx (a,b]$

Πράγματι, η $f: [a,b) \to (a,b]$ με $f(x) = a+b-x$ είναι καλά ορισμένη, 1-1, επί, συνεχής και f^{-1} συνεχής β) $[1,+\infty) \approx (0,1]$, αφού $f:[1,\infty) \to (0,1]$ με $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι επί, συνεχής και f^{-1} συνεχής.

$B_p(x_0,r) \subseteq \hat{B}_p(x_0,r)$

<u>Ορισμός</u>: Έστω X μη κενό σύνολο και p,d δύο μετρικές στο X. Λέμε ότι οι p,d είναι ισοδύναμες, αν ορίζουν στο X τα ίδια ανοικτά σύνολα, δηλαδή αν για κάθε $A \subseteq X$, το A είναι p-ανοικτό αν-το A είναι d ανοικτό.
Συμβολίζουμε $p \sim d$.

<u>Παρατήρηση</u>: $p \sim d \iff$ Η ταυτοτική συνάρτηση $I:(X,p) \to (X,d)$ είναι ομοιομορφισμός.

[διότι μια συνάρτηση είναι συνεχής αν και μόνο αν αντιστρέφει ανοικτά σε ανοικτά $I^{-1}(A)=A \quad \forall A \subseteq X$]

$\iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο X, $\forall x \in X$
$x_n \xrightarrow{p} x \iff x_n \xrightarrow{d} x$
(αρχή μεταφοράς)
(χαρακτ. συνέχειας ακολουθιών)

[κριτήριο Haussdorff]
$\iff \forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0$
$\exists \delta_1 > 0 \quad B_p(x,\delta_1) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$
$\exists \delta_2 > 0 \quad B_d(x,\delta_2) \subseteq B_p(x,\varepsilon)$

<u>Παρατηρήσεις</u>: (i) Αν $X \neq \emptyset$, p,d δύο μετρικές στο X και $a,b>0$, ώστε
$p(x,y) \leq a\, d(x,y)$
$d(x,y) \leq b\, p(x,y)$, $\forall x,y \in X$, τότε $p \sim d$.

(ii) Αν $f:(X,p) \to (Y,d)$ ομοιομορφισμός και ορίσουμε μια μετρική σ στο X με τύπο $\sigma(x,y) = d(f(x),f(y))$. Η σ είναι μετρική και $\sigma \sim p$.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε υπάρχει d φραγμένη μετρική στο X ($\text{διαμ}((X,d)) < +\infty$) με $\rho \sim d$.

Απόδειξη: Αν θέσουμε $d(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$

Η d είναι μετρική στο X και η d είναι φραγμένη εφόσον $d(x,y)\le 1$, $\forall x,y\in X$

Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο X με $x\in X$

$$x_n \xrightarrow{\rho} x \iff \rho(x_n,x)\to 0 \iff \frac{\rho(x_n,x)}{1+\rho(x_n,x)}\to 0 \iff d(x_n,x)\to 0 \iff x_n \xrightarrow{d} x$$

Επομένως $\rho\sim d$.

Σημείωση: Μια άλλη επιλογή θα ήταν $d(x,y)=\min\{1,\rho(x,y)\}$

Άσκηση: Έστω (X,ρ) μ.χ.
A,B δύο μη κενά υποσύνολα του X.
α) Δ.ο. $\text{διαμ}(A\cup B)\le \text{διαμ}(A)+\rho(A,B)+\text{διαμ}(B)$
β) Δώστε δύο παραδείγματα ένα που να ισχύει ισότητα και να ισχύει γνήσια ανισότητα.

Απόδειξη: α) Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\text{διαμ}(A)<+\infty$, $\text{διαμ}(B)<+\infty$

Απ: Έστω $x,y\in A\cup B$
α) Αν $x,y\in A$ $\rho(x,y)\le \text{διαμ}\,A\le \text{διαμ}(A)+\rho(A,B)+\text{διαμ}\,B$
β) Ομοίως αν $x,y\in B$
γ) (ή $x\in B$ και $y\in A$) Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον $\rho(A,B)=\inf\{\rho(\gamma,\delta),\ \gamma\in A, \delta\in$

Για $x \in A, y \in B$ έχουμε ότι $\rho(x,y) \leq \rho(x,a) + \rho(a,b) + \rho(b,y)$
$\leq$ διαμ $(A) + \rho(a,b) + \varepsilon) +$ διαμB

άρα διαμ $(A \cup B) \leq$ διαμ$(A) + \rho(A,B) +$ διαμB

Εφόσον αυτό ισχύει $\forall \varepsilon > 0$ προκύπτει

διαμ $(A \cup B) \leq$ διαμ$(A) + \rho(A,B) +$ διαμB